

6. *Loicianskiy L.G.* Mechanics of fluid and gases. Moscow: Nauka, 1978. – 736 p. (in Russian).
7. *Stepanov G.Yu.* Hydrodynamics of turbomachine lattices. Moscow: Fizmatlit, 1962. – 512 p. (in Russian).

КРЫЛОВЫЕ ПРОФИЛИ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ

Леонтьев В.Г., Поташев А.В.

НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарёва
Казанского государственного университета

При проектировании крыловых профилей одной из важных проблем является максимизация коэффициента подъемной силы $C_y = 2Y/(L\rho_\infty v_\infty^2)$, где Y – подъемная сила, L – периметр контура профиля, ρ_∞ – плотность жидкости на бесконечности, v_∞ – скорость набегающего потока. Известно (см., например, [1] – [3]), что по модели идеальной несжимаемой жидкости максимальное значение $C_y = 2$ достигается при обтекании круга с совпадающими точками разветвления и схода потока. Несмотря на то, что в последние годы широкое развитие получили численные методы решения задач аэродинамической оптимизации, также представляет интерес изучение класса задач, в которых оптимальные профили удастся найти аналитически.

1. Профили с постоянной скоростью на каждой из поверхностей. Пусть искомый профиль обтекается установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости с заданной на бесконечности скоростью v_∞ , параллельной оси абсцисс. Требуется найти форму крылового профиля и коэффициент подъемной силы, если скорости на верхней и нижней поверхностях постоянны и равны v_1 и v_2 соответственно ($v_1 > v_2$). Длина верхней части контура равна L . Точка A – особая: в ней скорости терпят разрыв, она также является точкой разветвления потока.

В силу симметрии исходных данных картина течения будет симметрична относительно оси ординат, поэтому достаточно рассмотреть ее левую половину G_z (рис. 1).

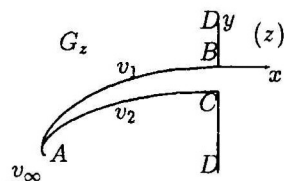


Рис. 1

Для решения задачи построим области G_w и G_χ , соответствующие области течения G_z в плоскостях комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ и функции

$$\chi = i \ln \left(\frac{1}{v_\infty} \frac{dw}{dz} \right) = \theta + i \ln \frac{v}{v_\infty}, \quad (1)$$

где v – величина скорости, θ – ее аргумент. Если ввести безразмерную скорость $\bar{v} = v/v_\infty$, то $\chi = \theta + i \ln \bar{v}$. Сопоставим далее области течения G_z верхнюю полуплоскость G_t в плоскости вспомогательного переменного $t = \xi + i\eta$ со следующим соответствием точек: точка A переходит в точку $\xi = a$, B – в точку $\xi = 1$, C – в точку $\xi = -1$, а D переходит в бесконечность. Отображения области G_t на области G_w и G_χ запишутся по формуле Кристоффеля-Шварца

$$w(t) = iA \int_1^t \frac{(t-a)dt}{\sqrt{t^2-1}}, \quad (2)$$

$$\chi(t) = -iB \int_1^t \frac{dt}{(t-a)\sqrt{t^2-1}} + i \ln \bar{v}_1, \quad (3)$$

где A и B – действительные положительные константы. Для отыскания неизвестных параметров A , a , B имеем систему уравнений

$$\chi(\infty) = 0, \quad \varphi(a) = -v_1 L/2, \quad \pi i \operatorname{res}_{t=a} \frac{d\chi}{dt} = -i \ln \frac{v_1}{v_2}.$$

Решив ее, найдем

$$A = \frac{v_1 L}{2 [\sqrt{1-a^2} + a(\arcsin a - \pi/2)]}, a = -\cos \frac{\pi \ln \bar{v}_1}{\kappa}, B = \frac{\kappa \sqrt{1-a^2}}{\pi}, \quad (4)$$

где $\kappa = \ln(v_1/v_2)$. Для определения координат искомого контура профиля воспользуемся формулой (1), откуда

$$z(t) = \frac{1}{v_\infty} \int_1^t e^{i\chi(t)} w'(t) dt. \quad (5)$$

Для исследования поведения $z(t)$ на бесконечности в подынтегральном выражении правой части формулы (5) сделаем замену переменной $\tau = 1/t$. Тогда при $t \rightarrow \infty$ имеем $\tau \rightarrow 0$, а производная $z'(\tau)$ с учетом (2) и (3) запишется в виде

$$z'(\tau) \sim -\frac{iA}{2v_\infty} \left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{a+\beta}{\tau} + a\beta \right), \tau \rightarrow 0,$$

где $\beta = \kappa \sqrt{1-a^2}/\pi$. Для однозначности функции $z(\tau)$ необходимо, чтобы коэффициент при $1/\tau$ был равен нулю, то есть чтобы $a + \beta = 0$. Отсюда найдем условие замкнутости контура искомого профиля в виде

$$\bar{v}_1 = \exp \left(\frac{\kappa}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\kappa} \right). \quad (6)$$

Из полученного условия следует, что решение задачи определяется одним безразмерным параметром $\kappa = \ln(v_1/v_2)$.

Коэффициент подъемной силы. Значение коэффициента подъемной силы $C_y = 2\bar{\Gamma}$ прямо пропорционально безразмерной циркуляции скорости

$$\bar{\Gamma} = \frac{\Gamma}{v_\infty L} = -\frac{2\pi a A}{v_\infty L}.$$

Если учесть условия (4), то получим зависимость $\bar{\Gamma}$ от κ в виде

$$\bar{\Gamma} = \frac{\Gamma}{v_1 L} = \kappa \pi \left[\pi + \kappa \left(\arcsin \frac{\kappa}{\sqrt{\pi^2 + \kappa^2}} + \frac{\pi}{2} \right) \right]^{-1}.$$

Нетрудно показать, что с увеличением κ величина $\bar{\Gamma}$ растет и при $\kappa \rightarrow \infty$ стремится к единице. С учетом условия замкнутости (6) при $\kappa \rightarrow \infty$

получим $v_1 = ev_\infty$. Тогда предельное значение коэффициента подъемной силы запишется в виде

$$C_y = \frac{2\Gamma}{Lv_\infty} = \frac{2eLv_\infty}{Lv_\infty} = 2e.$$

Результаты расчетов. По приведенным выше формулам были проведены численные расчеты и построены профили при различных числах κ . На рис. 2, а показана зависимость коэффициента подъемной силы от κ : с ростом параметра κ величина C_y растет и стремится к $C_{y\text{плз}} = 2e$ при $\kappa \rightarrow \infty$. Результаты расчетов показали, что при любых числах $\kappa \neq 0$ области течения получаются неоднolistными (см. рис. 2, б) (нижняя поверхность профиля, изображенная штриховой линией, располагается выше верхней, изображенной сплошной линией). Следовательно, реализовать физически такие профили невозможно.

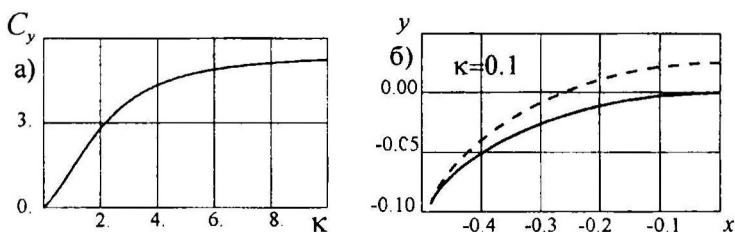


Рис. 2

2. Построение однолистных профилей. Для получения однолистного решения изменим постановку задачи: будем считать, что точка скачка скорости расположена на верхней части контура профиля. Требуется определить форму профиля и коэффициент подъемной силы, если скорость на нижней части AA' контура профиля и начальных участках AE и $A'E'$ верхней части равна v_2 , а на среднем участке EE' верхней части контура – v_1 . Заданы также длина L участка $AEE'A'$ контура профиля, скорость v_∞ набегающего потока и параметр $\lambda = 2L_{AE}/L$ (L_{AE} – длина участка AE), который задает положение точки скачка скоростей. Здесь точка E – точка разрыва скоростей, а A – точка разветвления потока (рис. 3). Аналогично предыдущему случаю картина течения будет симметричной относительно оси ординат, поэтому рассмотрим ее левую половину G_z .

Для решения задачи построим области G_w и G_χ , соответствующие области течения G_z в плоскостях комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ и функции $\chi = \theta + i \ln(v/v_\infty)$. Как и ранее, используем верхнюю полуплоскость G_t во вспомогательной плоскости $t = \xi + i\eta$ с таким же соответствием точек. Отличие состоит лишь в том, что появится дополнительная точка E с координатой $\xi = b$, причем $a \leq b \leq 1$.

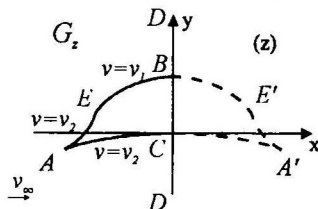


Рис. 3

Конформное отображение области G_t на область G_w запишется по формуле (2), а на область G_χ – по формуле

$$\chi(t) = -iB \int_1^t \frac{dt}{(t-b)\sqrt{t^2-1}} + i \ln \bar{v}_1. \quad (7)$$

Переход в физическую плоскость осуществляется по формуле (5). В полученные выражения входит шесть неизвестных A, B, a, b, v_1, v_2 . Для их определения имеем систему уравнений

$$\pi i \operatorname{res}_{t=b} \frac{d\chi}{dt} = -i\kappa, \quad W(b) = \varphi_B, \quad W(a) = \varphi_A, \quad W(-1) = \varphi_E = -\frac{\Gamma}{2},$$

$$\chi(\infty) = 0, \quad \operatorname{res}_{t \rightarrow \infty} \frac{dz}{dt} = 0.$$

Получилась замкнутая система нелинейных уравнений, откуда можно найти неизвестные величины, решив ее каким-либо численным методом. Однако анализ этой системы показал, что удобнее использовать полуобратную постановку задачи, задавая вместо λ координату b точки скачка скоростей во вспомогательной плоскости t . Тогда неизвестные параметры и величины скоростей можно найти в аналитическом виде,

выразив их через b и κ :

$$a = -\frac{\kappa\sqrt{1-b^2}}{\pi}, \quad B = -a, \quad \bar{v}_1 = \exp \frac{\kappa}{\pi} \arccos(-b), \quad \bar{v}_2 = \bar{v}_1 \exp(-\kappa),$$

$$A = \frac{[(1-\lambda)\bar{v}_1 + \lambda\bar{v}_1]L}{2[\sqrt{1-a^2} + a(\arcsin a - \pi/2)]},$$

$$\frac{1}{\lambda} = 1 - e^{\kappa} \left[1 - \frac{\sqrt{1-a^2} + a(\arcsin a - \pi/2)}{\sqrt{1-b^2} + a(\arcsin b - \pi/2)} \right]^{-1},$$

$$l = \frac{[(1-\lambda)\bar{v}_1 + \lambda\bar{v}_1]L}{2\bar{v}_2} - \frac{Aa\pi}{\bar{v}_2}.$$

Область D допустимых значений параметров b и κ определяется неравенствами $-1 \leq a \leq b \leq 1$ и имеет вид, показанный на рис. 4.

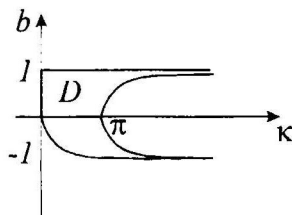


Рис. 4

Результаты расчетов. Решение задачи в рассмотренном случае зависит от двух параметров, причем область их допустимых значений достаточно сложна. Поэтому исследование наличия или отсутствия глобального максимума в этой задаче пока не проведено. Однако этот вопрос был исследован численно. На рис. 5 приведена зависимость коэффициента подъемной силы от параметра b при различных числах κ . Из результатов видно, что при $\kappa = \text{const}$ он достигает максимума при некотором значении b из области определения, а с ростом κ — увеличивается.

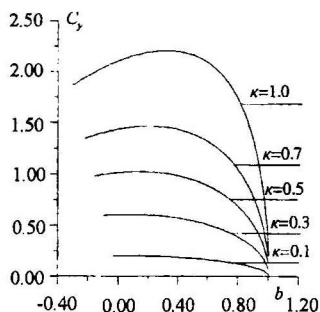


Рис. 5

На рис. 6 приведены примеры построенных профилей, которые показывают, что в данном классе профилей удастся получить однолистные течения, а соответствующие им профили уже могут быть реализованы физически.

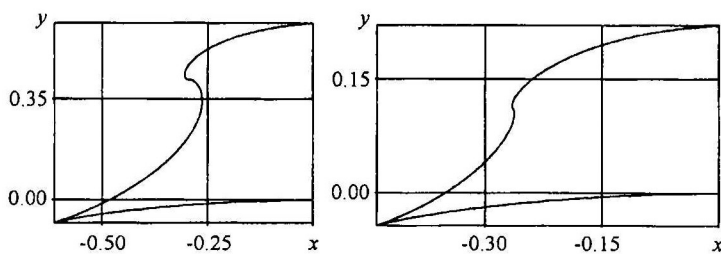


Рис. 6

Авторы благодарят профессора Г.Ю.Степанова за поставленную задачу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты N 96-01-00112, 96-01-00070).

Литература

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973. – 736 с.
2. Зубов В.И. К вопросу об оптимальном профиле крыла в потоке идеальной несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ. – 1980. – Т. 20. – N 1. – С. 71-74.

3. Елизаров А.М. Некоторые экстремальные задачи теории крыла // Изв. вузов. Математика. – 1988. – N 10. – С. 71-74.

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ГАЗЕМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Расулов К.М., Фатулаев Б.Ф.

Смоленский государственный педагогический институт

Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простой замкнутой гладкой кривой L . В качестве направления положительного обхода на контуре L примем тот, при котором область T^+ остается слева. Через T^- будем обозначать дополнение $T^+ \cup L$ до полной плоскости.

Рассмотрим следующую краевую задачу. Требуется найти все кусочно-бианалитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ с линией скачков L , исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L следующим двум условиям

$$F^+[\alpha(t)] = G_0(t) \cdot F^-(t) + g_0(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial n_+} = -G_1(t) \frac{\partial F^-(t)}{\partial n_-} + it' g_1(t), \quad (2)$$

где $\partial/\partial n_+$ ($\partial/\partial n_-$) – производная по внутренней (внешней) нормали к L , $L \in C_\mu^2$ (т. е. кривая L задается уравнением $t = x(s) + iy(s)$, где $x(s), y(s) \in H^{(2)}(L)$), i – мнимая единица, $t' = dt/ds$, а $G_k(t)$, $g_k(t)$ ($k = 0, 1$) – заданные на L функции, причем $G_k(t) \in H^{(3-k)}(L)$, $g_k(t) \in H^{(2-k)}(L)$ и $G_k(t) \neq 0$ на L ; $\alpha(t)$ – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм L на себя и, кроме того, $\alpha'(t) \neq 0$, $\alpha(t) \in H^{(2)}(L)$.

Сформулированную задачу будем называть задачей $H_{2,2}$. Сразу отметим, что в случае $\alpha(t) \equiv t$ она подробно исследована в работах К.М.Расулова [1-3]. В данной работе изучен случай $\alpha(t) \neq t$. Решение будем искать в виде (см. также [1])

$$F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z} \varphi_1^+(z), \quad z \in T^+; \quad (3a)$$